

- ① ans cette séance on va voir :
- (i) matrice + matrice augmentée ← associées à un SFL
 - (ii) Coefficient principal d'une ligne
 - (iii) matrice échelonnée et échelonnée réduite
 - (iv) variables libres et liées
 - (v) méthode de Gauss-Jordan (idée)

§ 1.5. [Déf 1.6] Matrice = tableau $\rightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ } m lignes
n colonnes

Pour un SFL
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

on associe $\rightarrow$ matrice :

$\rightarrow$ matrice
augmentée

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & : & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & : & b_m \end{pmatrix}$$

| SLOGAN |

SFL = Matrice augmentée

[Déf 1.12] Les OEL pour SFL s'appliquent aussi à des matrices / matrices
augmentées.

Exemple 1.15 (suite) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases} \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array} \right).$

Déf 1.18 La taille d'une matrice est $\# \text{ lignes} \times \# \text{ colonnes}$

Le coefficient principal de la i -ème ligne de $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$, s'il existe, est le premier coefficient non nul.

Une matrice A est échelonnée si:

(ECH.1) Toute ligne en dessous d'une ligne nulle est aussi nulle

(ECH.2) Si L_i et L_j sont deux lignes de A avec $i < j$, a_{i,p_i} est le coefficient principal de L_i , a_{j,p_j} est le coefficient principal de L_j , alors $p_i < p_j$.

$$\begin{matrix} L_i \\ L_j \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & a_{i,p_i} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{j,p_j} \end{array} \right)$$

$\uparrow$ p_i -ème colonne $\uparrow$ p_j -ème colonne

Exemple

$$\begin{matrix} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \end{matrix} \left(\begin{array}{cccccc} \textcircled{1} & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right)$$

Exemple C

$$L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow A =$$

échelonnéé ✓

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est échelonnée
X

Déf. 1.26

Une matrice A est échelonnée réduite si elle est échelonnée et (E.R.)

- (ECH.3) tous les coefficients principaux valent 1;
- (ECH.4) si la colonne C_k de A inclut un coefficient principal d'une ligne L_i de A , alors les autres coefficients dans la colonne sont nuls.

Pivot = coefficient principal d'une matrice E.R.

Exemple C (suite)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas échelonnée

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée mais pas réduite

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée réduite

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée mais pas réduite

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 11/8 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4}L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 11/8 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on peut passer de A vers la FER à partir d'une suite finie d'OEL.

Thm. 1.21 + 1.29

Toute matrice A de taille $m \times n$ est ligne-équivalente à une unique matrice échelonnée réduite. $\leftarrow$ Forme échelonnée réduite de A
FER

Exemple 1.25* (*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}]{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivots

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour matrices non nulles:
- (1) Choisir une ligne avec le coeff. principal le plus à gauche possible (et si c'est 1, c'est mieux)
 - (2) Éliminer les autres coefficients dans la même colonne avec des (OEL.III)
- ...

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 16 \\ x_2 + 3x_3 = -11 \end{cases}$$

variables liées (pointing to x_1, x_2)

variable libre (pointing to x_3)

$$\begin{cases} x_1 = 16 + 4x_3 \\ x_2 = -11 - 3x_3 \end{cases}$$

$$\leadsto \text{Sol} (*) = \begin{pmatrix} 16 + 4x_3 \\ -11 - 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R}$$

x_1 (pointing to $16 + 4x_3$)

x_2 (pointing to $-11 - 3x_3$)

Def (p.3) Pour un SFL $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$

Les autres variables sont appelées libres.

$\leadsto$ les variables liées sont celles indexées par les colonnes incluant les pivots de la FIER de la matrice augmentée associée.

SLOGAN

La FIER d'une matrice augmentée permet de décrire toutes les sol. du SFL associé: chaque variable liée en fonction des variables libres.

Exemple 1.25 Résoudre

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

(voir notes manuscrites pour la solution)